SESSION 1986

MATHÉMATIQUES

Options T et TA

Épreuve n° 2 (problème)

Durée : 3 heures

Les candidats sont invités à donner de leurs diverses affirmations des justifications brèves mais complètes .

La partie III est indépendante des parties I et II.

Pour toute fonction f ,d'une variable réelle,la notation f' représente la dérivée .

Pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout réel $x > 0$ on pose :

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(n+x)} \qquad \text{(avec } 0! = 1 \text{).}$$

Lorsque la série $\Sigma u_n(x)$ est convergente on note sa somme S(x).

I

1°) Montrer que pour $x > 0$ les séries de fonctions Σu_n et $\Sigma u'_n$ sont convergentes.Sont-elles absolument convergentes ?
Calculer S(1).
Préciser le signe de S(x).

2°) Soit $R_n(x) = S(x) - \sum_{k=0}^{k=n} u_k(x)$.
Déterminer un majorant simple de $|R_n(x)|$.
Donner, en justifiant la méthode employée,une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de $S(\frac{1}{2})$.

3°) Montrer que les séries Σu_n et $\Sigma u'_n$ sont uniformément convergentes sur $]0, +\infty[$.
Montrer que S est dérivable pour $x > 0$ et préciser le signe de $S'(x)$.

II

1°) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x > 0$:

$$x\, u_n(x) = u_{n-1}(x+1) + \frac{(-1)^n}{n!} \quad .$$

En déduire une relation entre S(x) et S(x+1) .

2°) Déterminer la valeur des limites :

$$\lim_{x \to 0,\, x > 0} x\, S(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0,\, x > 0} S(x) \quad .$$

Donner un équivalent de S(x) lorsque x tend vers 0 .

3°) Montrer que S(x) est bornée pour $x \geqslant 1$.
En déduire la valeur de la limite :

$$\lim_{x \to +\infty} S(x) \quad .$$

Donner un équivalent de S(x) quand x tend vers $+\infty$.

4°) Indiquer l'allure de la courbe représentative de S .

III

1°) Etant donné un réel $x > 0$ on définit,pour $t > 0$, la fonction f_x par la relation :

$$f_x(t) = e^{-t}\, t^{x-1} \quad .$$

Pour quelles valeurs de x l'intégrale

$$I(x) = \int_0^1 f_x(t)dt$$

est-elle convergente ?

2°) Soit g_x la fonction définie par $g_x(t) = f_x(t) - t^{x-1}$ pour $t > 0$ et $g_x(0) = 0$. Montrer que g_x est la somme d'une série de fonctions uniformément convergente sur [0,1] .

3°) Déduire de ce qui précède une relation entre I(x) et S(x).